



ce
pre
UNI

Trigonometría

**funciones trigonométricas auxiliares:
Verso, coverso y exsecante**

**CICLO
PREUNIVERSITARIO
2024-1**

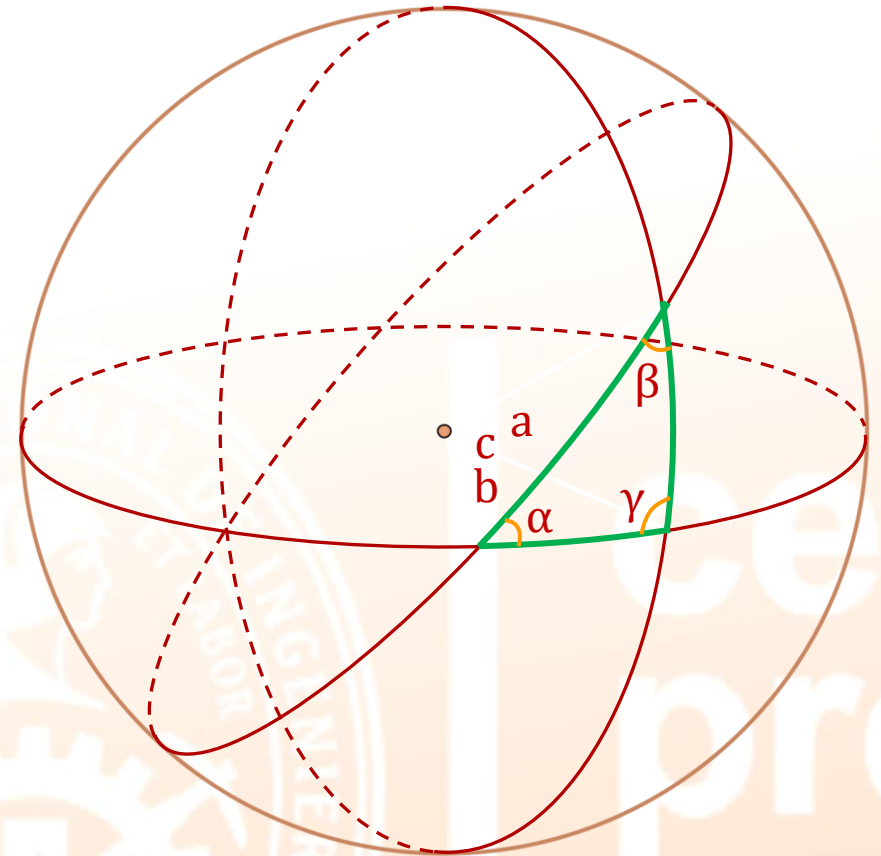




Historia y aplicaciones

Históricamente, el verso ($\text{vers}(\alpha)$) fue considerado una de las funciones trigonométricas más importantes, pero ha perdido renombre en los tiempos modernos debido a la disponibilidad de los ordenadores.

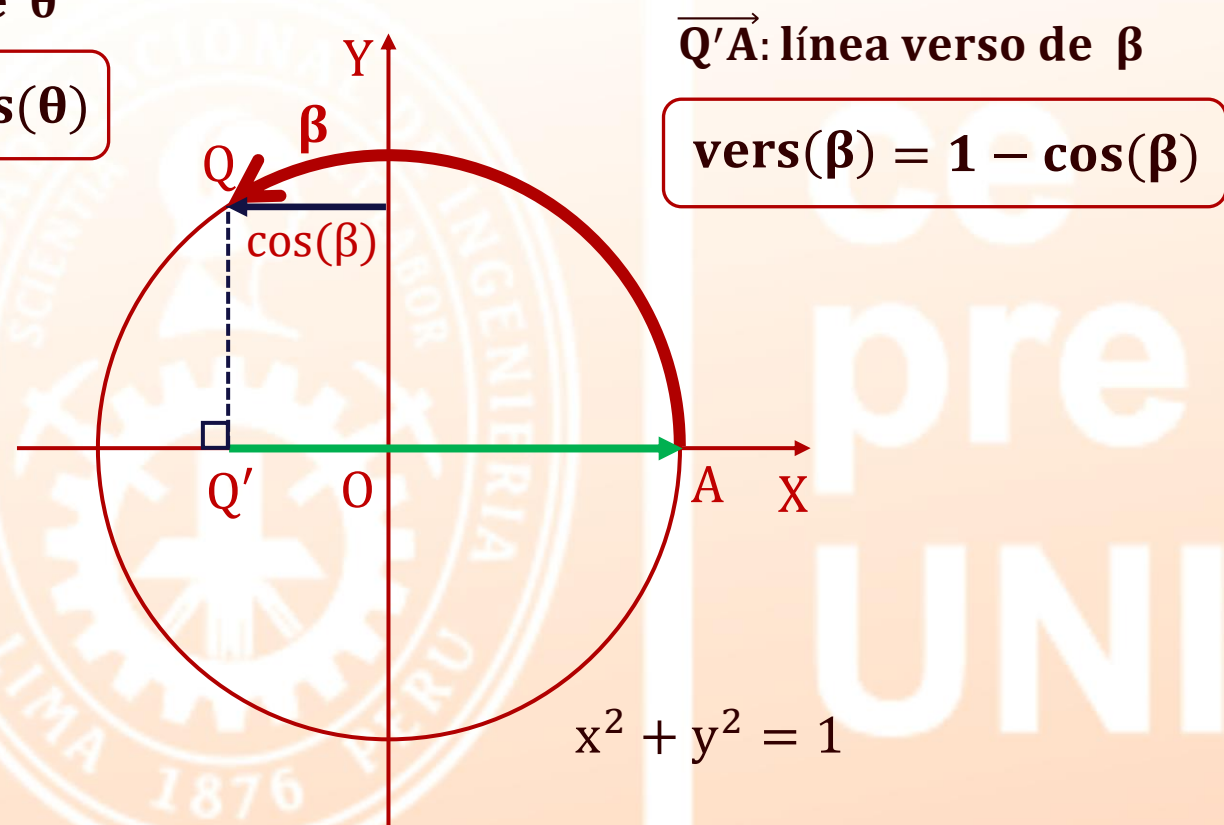
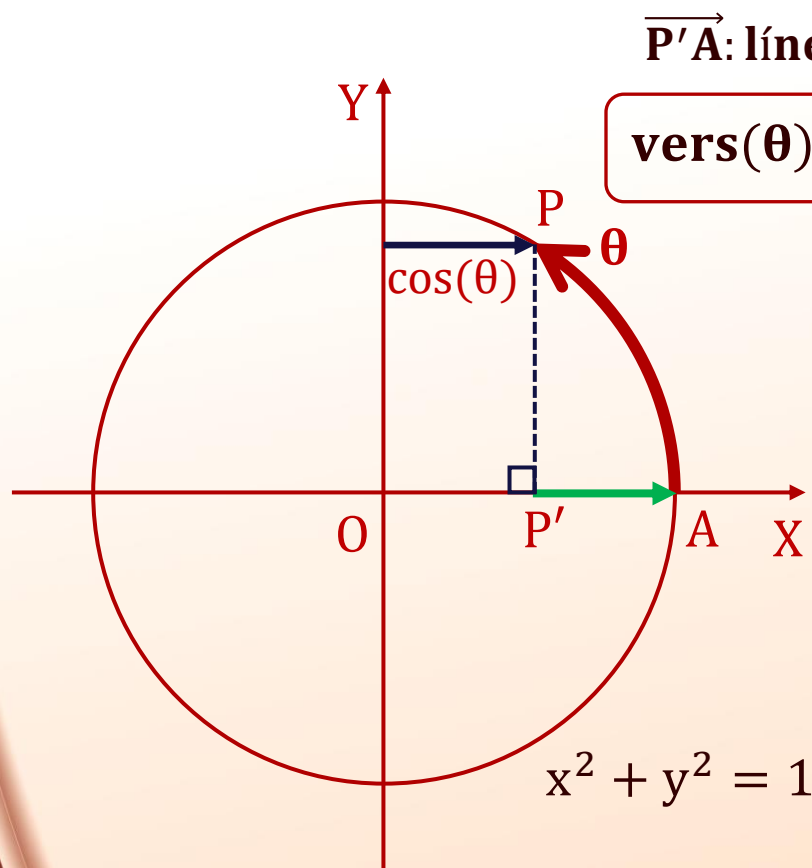
El seno verso, en particular, fue importante en navegación debido a que aparece en la fórmula usada para calcular distancias con exactitud cuando se dan las posiciones angulares en una esfera (la longitud y la latitud).



LÍNEAS AUXILIARES EN LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

LÍNEA VERSO

Se representa en la C.T. como el segmento de recta dirigido, trazado desde el pie de la línea seno hasta el origen de arcos.

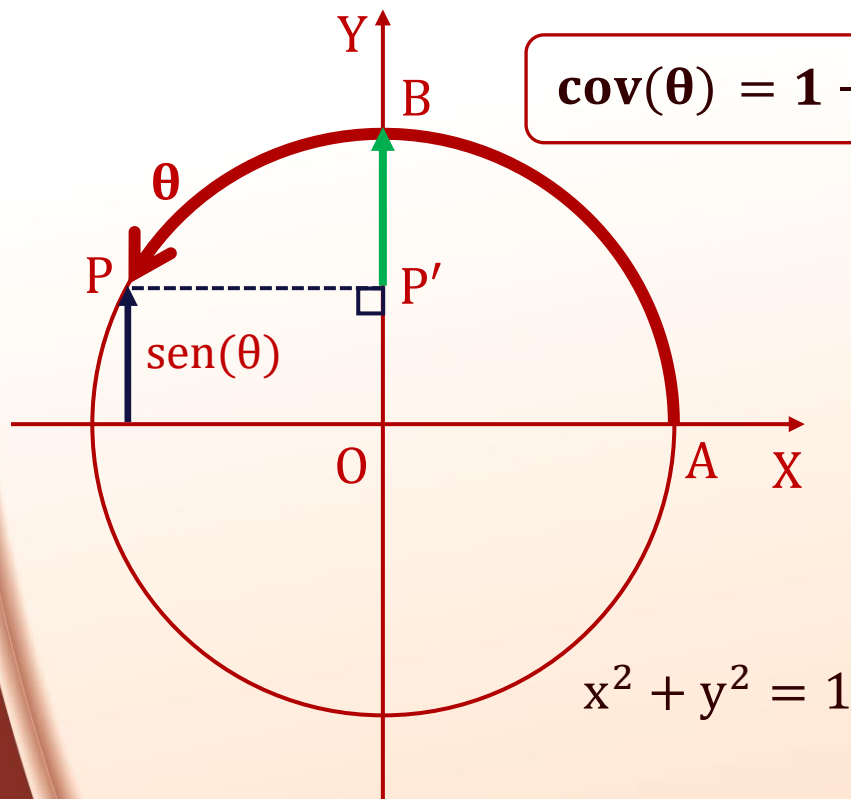


LÍNEA COVERSO

Se representa en la C.T. como el segmento de recta dirigido, trazado desde el pie de la línea coseno hasta el origen de complementos.

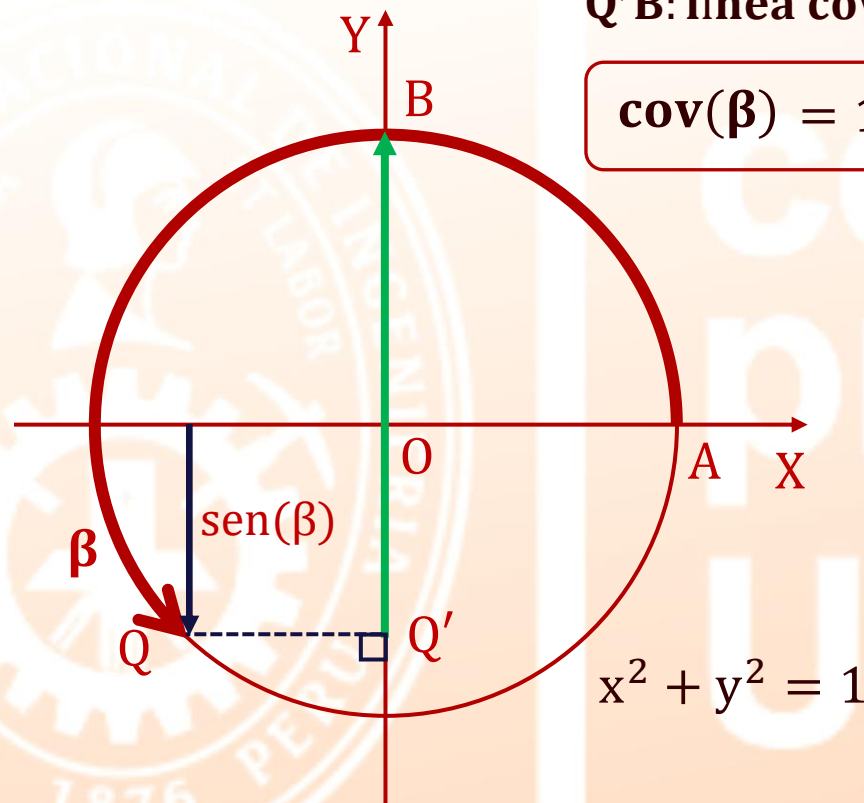
$\overrightarrow{P'B}$: línea coverso de θ

$$\text{cov}(\theta) = 1 - \text{sen}(\theta)$$



$\overrightarrow{Q'B}$: línea coverso de β

$$\text{cov}(\beta) = 1 - \text{sen}(\beta)$$

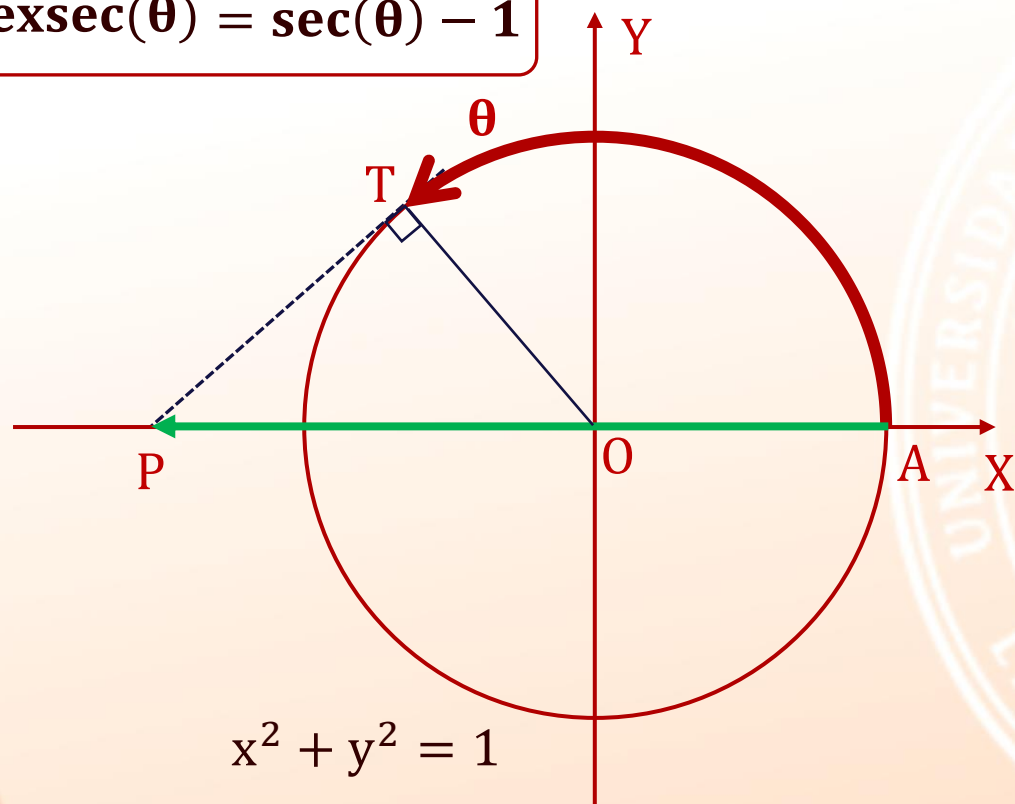


LÍNEA EX SECANTE

Se representa en la C.T. como el segmento de recta dirigido, trazado desde el origen de arcos hasta el extremo final de la línea secante.

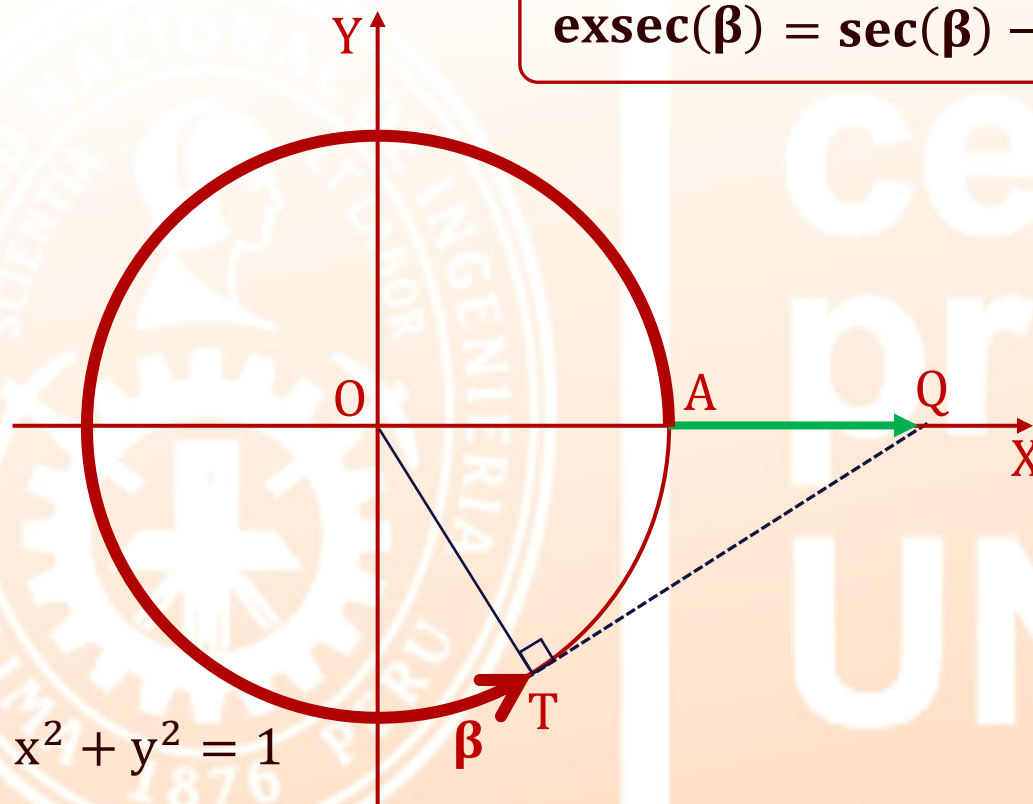
$\overrightarrow{AP}$: línea ex secante de θ

$$\text{exsec}(\theta) = \sec(\theta) - 1$$



$\overrightarrow{AQ}$: línea ex secante de β

$$\text{exsec}(\beta) = \sec(\beta) - 1$$



PROBLEMA 01

Ordenar en forma descendente los siguientes valores:

$vers(8)$, $cov(11)$ y $exsec(5)$

- A) $vers(8)$, $cov(11)$, $exsec(5)$
- B) $cov(11)$, $exsec(5)$, $vers(8)$
- C) $exsec(5)$, $vers(8)$, $cov(11)$
- D) $vers(8)$, $exsec(5)$, $cov(11)$
- E) $cov(11)$, $vers(8)$, $exsec(5)$,

CLAVE: A



FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS AUXILIARES

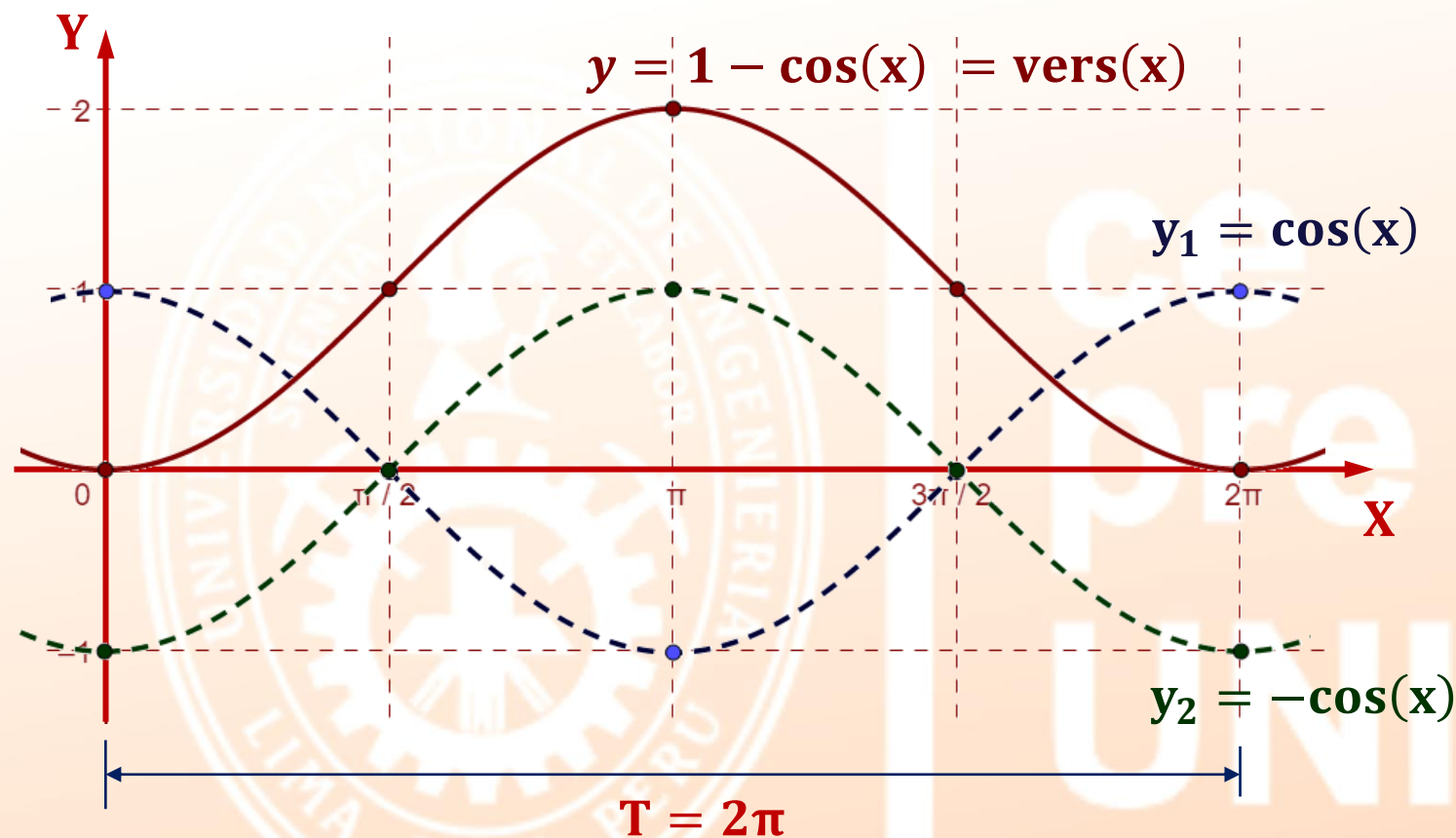
ce
pre
UNI

1. FUNCIÓN VERSO

$$f = \{(x; y) / y = \text{vers}(x) = 1 - \cos(x), x \in \mathbb{R}\}$$

Análisis de la función verso:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Ran}(f) = [0; 2]$
 $0 \leq \text{vers}(x) \leq 2$
- Período mínimo(T) = 2π
 $\text{vers}(x) = \text{vers}(x + 2\pi)$
- Simetría: es función par
 $\text{vers}(x) = \text{vers}(-x)$
- Es continua $\forall x \in \mathbb{R}$



PROBLEMA 02

Determine el dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \frac{\text{vers}(6x) - \text{vers}(8x)}{\text{vers}(14x)}; \forall k \in \mathbb{Z}$$

CLAVE: E

- A) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$ B) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{3} \right\}$ C) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{4} \right\}$ D) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{6} \right\}$ E) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{7} \right\}$

PROBLEMA 03

Determine el dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \ln(\text{vers}(|x|) - |\text{sen}(x)|); x \in < 0; 2\pi >$$

CLAVE: C

- A) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ B) $\left\langle \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\rangle$ C) $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ D) $\left\langle \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\rangle$ E) $\left\langle \frac{3\pi}{2}; \frac{7\pi}{4} \right\rangle$

PROBLEMA 04

Calcule las coordenadas del punto de corte de las gráficas de las funciones f y g definidas por:

$$f(x) = 1 - \text{vers}(2x); g(x) = \text{sen}(x); x \in \left[\frac{\pi}{4}; \pi\right]$$

CLAVE: C

A) $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{1}{2}\right)$

B) $\left(\frac{5\pi}{12}; \frac{7}{8}\right)$

C) $\left(\frac{5\pi}{6}; \frac{1}{2}\right)$

D) $\left(\frac{7\pi}{12}; \frac{1}{3}\right)$

E) $\left(\pi; \frac{7}{9}\right)$

PROBLEMA 05

Determine el rango de la función f , definida por $f(x) = \frac{\text{sen}^2(x)}{|\text{vers}(x)|}$

A) $[-2; 2]$

B) $[0; 1]$

C) $[0; 1)$

D) $[0; 2]$

E) $[0; 2)$

CLAVE: E

PROBLEMA 06

Determine el rango de la función f , definida por

$$f(x) = \text{vers}^4(x) + (2 - \text{vers}(x))^4$$

CLAVE: D

- A) $[7; 11]$ B) $[6; 12]$ C) $[4; 14]$ D) $[2; 16]$ E) $[0; 19]$

PROBLEMA 07

En la figura se tiene la gráfica de la función f , definida por $f(x) = \text{vers}(5x)$. Si $PU = 2CP$, calcule el área (en u^2) de la región rectangular sombreada



- A) $\frac{\pi}{5}$ B) $\frac{2\pi}{5}$ C) $\frac{3\pi}{5}$
D) $\frac{3\pi}{4}$ E) π

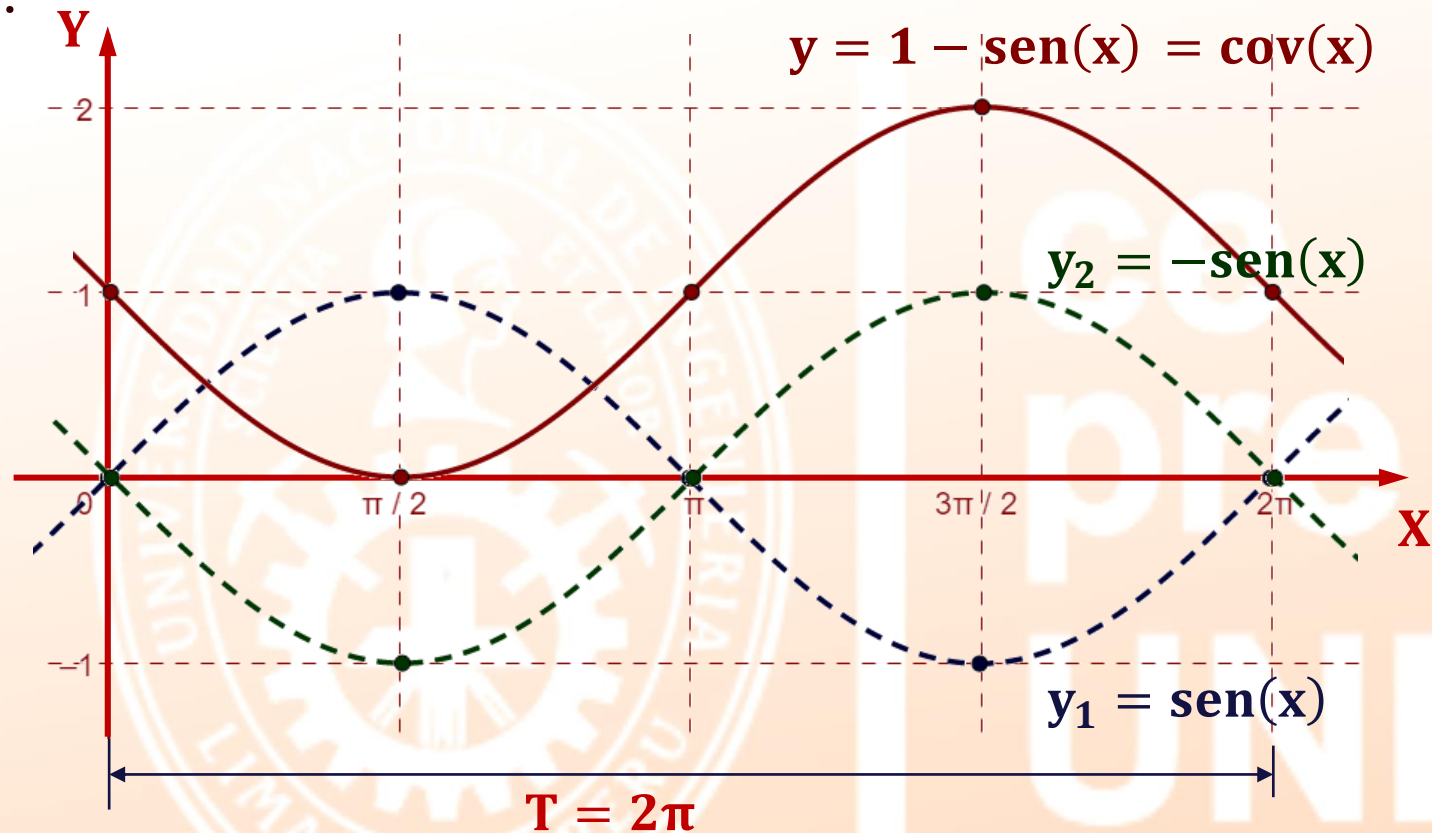
CLAVE: A

2. FUNCIÓN COVERSO

$$f = \{(x; y) / y = \text{cov}(x) = 1 - \text{sen}(x), x \in \mathbb{R}\}$$

Análisis de la función coverso:

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$
- $\text{Ran}(f) = [0; 2]$
 $0 \leq \text{cov}(x) \leq 2$
- Período mínimo(T) = 2π
 $\text{cov}(x) = \text{cov}(x + 2\pi)$
- Simetría:
no es función par ni impar
- Es continua $\forall x \in \mathbb{R}$



PROBLEMA 08

Determine el dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \frac{1 + \text{vers}(2x)}{1 - \text{cov}(2x)} + \frac{1 + \text{vers}(4x)}{1 - \text{cov}(4x)}; \forall k \in \mathbb{Z}$$

A) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}$ B) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{4} \right\}$ C) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2} \right\}$ D) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{4} \right\}$ E) $\mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{8} \right\}$

CLAVE: D

PROBLEMA 09

Determine el dominio de la función f , definida por

$$f(x) = \frac{\sqrt{|\cos(x)| - |\cos(x)|}}{\sin(x) + 1}; x \in \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$$

A) $[\pi; 2\pi]$

B) $[\pi; 2\pi] - \left\{\frac{3\pi}{2}\right\}$

C) $[\pi; 2\pi] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

D) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

E) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right) \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

CLAVE: E

PROBLEMA 10 (PC 4 CEPRE UNI 2023 - I)

Determine el dominio de la función f , definida por:

$$f(x) = \sqrt[4]{|\text{vers}(x)| - |\text{cov}(x)|}; \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

A) $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

B) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

C) $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right]$

D) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$

E) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$

CLAVE: C

PROBLEMA 11 (PC4 – CEPRE UNI 2018-1)

Determine el dominio de la función f , definida por

$$f(x) = \sqrt{|\text{vers}(|x|)| - \text{cov}(x)}, \forall k \in \mathbb{Z}$$

A) $\left[-\frac{k\pi}{2}; \frac{k\pi}{2}\right]$

D) $\left[\frac{\pi}{4}(8k+1); \frac{\pi}{4}(8k+5)\right]$

B) $\left[-\frac{\pi}{4}(2k+1); \frac{\pi}{4}(2k+1)\right]$

E) $\left[\frac{\pi}{8}(4k+1); \frac{\pi}{8}(4k+3)\right]$

C) $\left[-\frac{\pi}{8}(2k+1); \frac{\pi}{8}(2k+1)\right]$

CLAVE: D

PROBLEMA 12

Determine el rango de la función f , definida por $f(x) = 2\text{vers}(x)\text{cov}(x)$

A) $[0; 3 + 2\sqrt{2}]$

B) $[0; 4]$

C) $[0; 6]$

D) $[0; 4\sqrt{2}]$

E) $[0; 6\sqrt{2}]$

CLAVE: A

PROBLEMA 13 (EXAMEN FINAL – CEPRE UNI 2023-1)

Si $\text{vers}^2(x) + \text{cov}^2(x) = 2$. Calcule el valor de $\tan(x) + \cot(x)$, tal que

$$x \neq \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

A) $-\frac{8}{3}$

B) $-\frac{4}{3}$

C) $\frac{8}{3}$

D) $\frac{4}{3}$

E) 3

CLAVE: A

PROBLEMA 14

Acerca de la función f , cuya regla de correspondencia es $f(x) = \frac{\text{vers}(x)}{|\text{cov}(x) - 1|}$, analice el valor de verdad o falsedad de las proposiciones.

- I. Si $x \in < \pi; 2\pi >$, entonces f es creciente
- II. f es una función par
- III. El periodo mínimo de f es 2π

A) VVV

B) FFV

C) FVV

D) FFF

E) FVF

CLAVE: C

PROBLEMA 15

Sean las funciones f , g y h definidas por

$$f(x) = \frac{\text{vers}(x) + \text{cov}(2x) - 2}{\text{cov}(x) - \text{vers}(2x) - 1}; \quad g(x) = 1 \text{ y } h(x) = -1; \quad x \in [0; \pi)$$

Calcule el área, en u^2 , de la región encerrada por las gráficas de dichas funciones.

A) $\frac{\pi}{2}$

B) π

C) $\frac{3\pi}{2}$

D) 2π

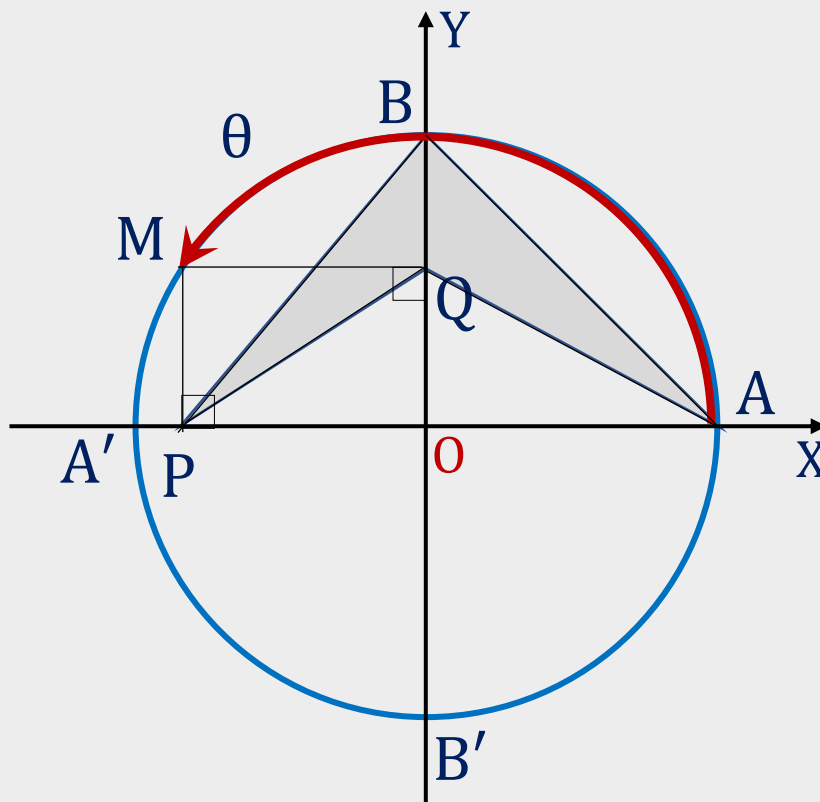
E) $\frac{5\pi}{2}$

CLAVE: B

PROBLEMA 16

En la circunferencia trigonométrica mostrada, calcule el área de la región sombreada en términos de θ .

- A) $\text{sen}(\theta)\text{cov}(\theta)$
- B) $\cos(\theta)\text{cov}(\theta)$
- C) $\text{vers}(\theta)\text{cov}(\theta)$
- D) $0,5\text{vers}(\theta)\text{cov}(\theta)$
- E) $0,5\text{vers}(\theta)\cos(\theta)$

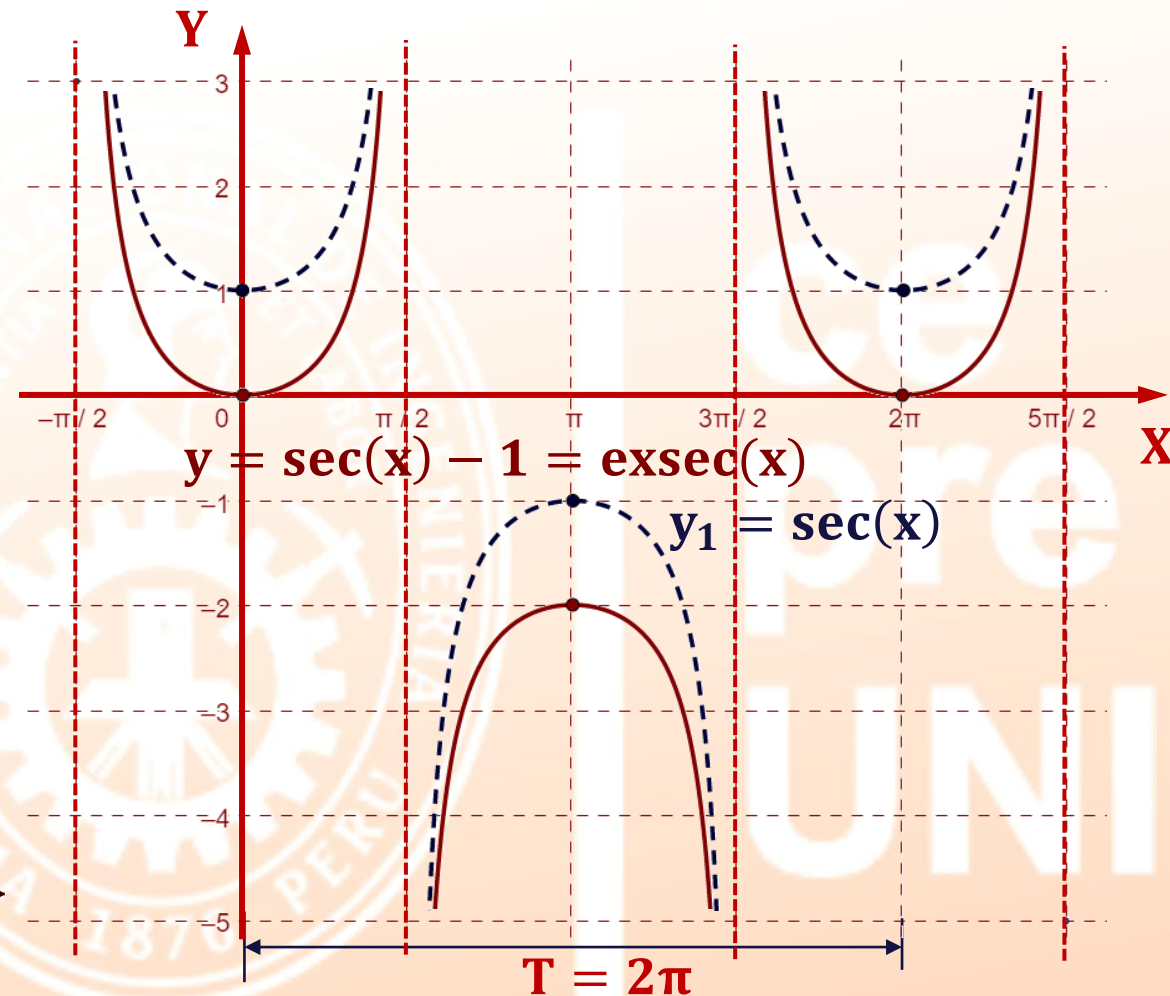

CLAVE: D

3. FUNCIÓN EX-SECANTE

$$f = \left\{ (x, y) / y = \text{exsec}(x) = \sec(x) - 1, x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\} \right\}$$

Análisis de la función exsecante

- $\text{Dom}(f) = \mathbb{R} - \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}$
- $\text{Ran}(f) = \mathbb{R} - \langle -2; 0 \rangle$
 $\text{exsec}(x) \leq -2 \vee 0 \leq \text{exsec}(x)$
- Período mínimo (T) = 2π
 $\text{exsec}(x) = \text{exsec}(x + 2\pi)$
- Simetría: es función par
 $\text{exsec}(-x) = \text{exsec}(x)$
- Es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \left\{ (2n + 1) \frac{\pi}{2}; n \in \mathbb{Z} \right\}$



PROBLEMA 17

Determine el dominio de la función f , definida por

$$f(x) = \frac{1}{\operatorname{exsec}^2(x) + 2 \operatorname{exsec}(x)}$$

A) $\mathbb{R} - \{2k\pi\}$

B) $\mathbb{R} - \{(2k + 1)\pi\}$

C) $\mathbb{R} - \{k\pi\}$

D) $\mathbb{R} - \left\{\frac{k\pi}{2}\right\}$

E) $\mathbb{R} - \left\{\frac{(4k + 1)\pi}{2}\right\}$

CLAVE: D

PROBLEMA 18

Determine el rango de la función f , definida por

$$f(x) = \operatorname{exsec}^2(x) - 2|\operatorname{exsec}(x)| + 3$$

CLAVE: D

A) $[-1; +\infty)$

B) $[0; +\infty)$

C) $[1; +\infty)$

D) $[2; +\infty)$

E) $[3; +\infty)$

PROBLEMA 19

Sea la función f , definida por $f(x) = exsec(x) + \sen(x)$; $x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Calcule el valor de $2f_{\text{máx}} - f_{\text{mín}} + 2$.

CLAVE: B

A) $2\sqrt{2}$

B) $3\sqrt{2}$

C) $4\sqrt{2}$

D) $5\sqrt{2}$

E) $6\sqrt{2}$

PROBLEMA 20 (EXÁMEN ADMISIÓN UNI 2005-I)

Halle el número puntos de corte de la gráfica de $f(x) = exsec(x)$, con la gráfica de $g(x) = \cos(x)$, en el intervalo de $[-20\pi; 20\pi]$.

A) 19

B) 20

C) 21

D) 39

E) 40

CLAVE: E

PROBLEMA 21

Sean las funciones f y g , definidas por $f(x) = |\tan(x)||\csc(x)| + |\cot(x)||\sec(x)|$ y $h(x) = x \sec(x) + |\csc(x) + 1|$. Si $h(x_0) = f(x_0) + n$, determine n sabiendo que

$$x_0 \in \left\langle -\frac{25\pi}{6}; -\frac{23\pi}{6} \right\rangle$$

A) 0

B) -2

C) 2

D) 4

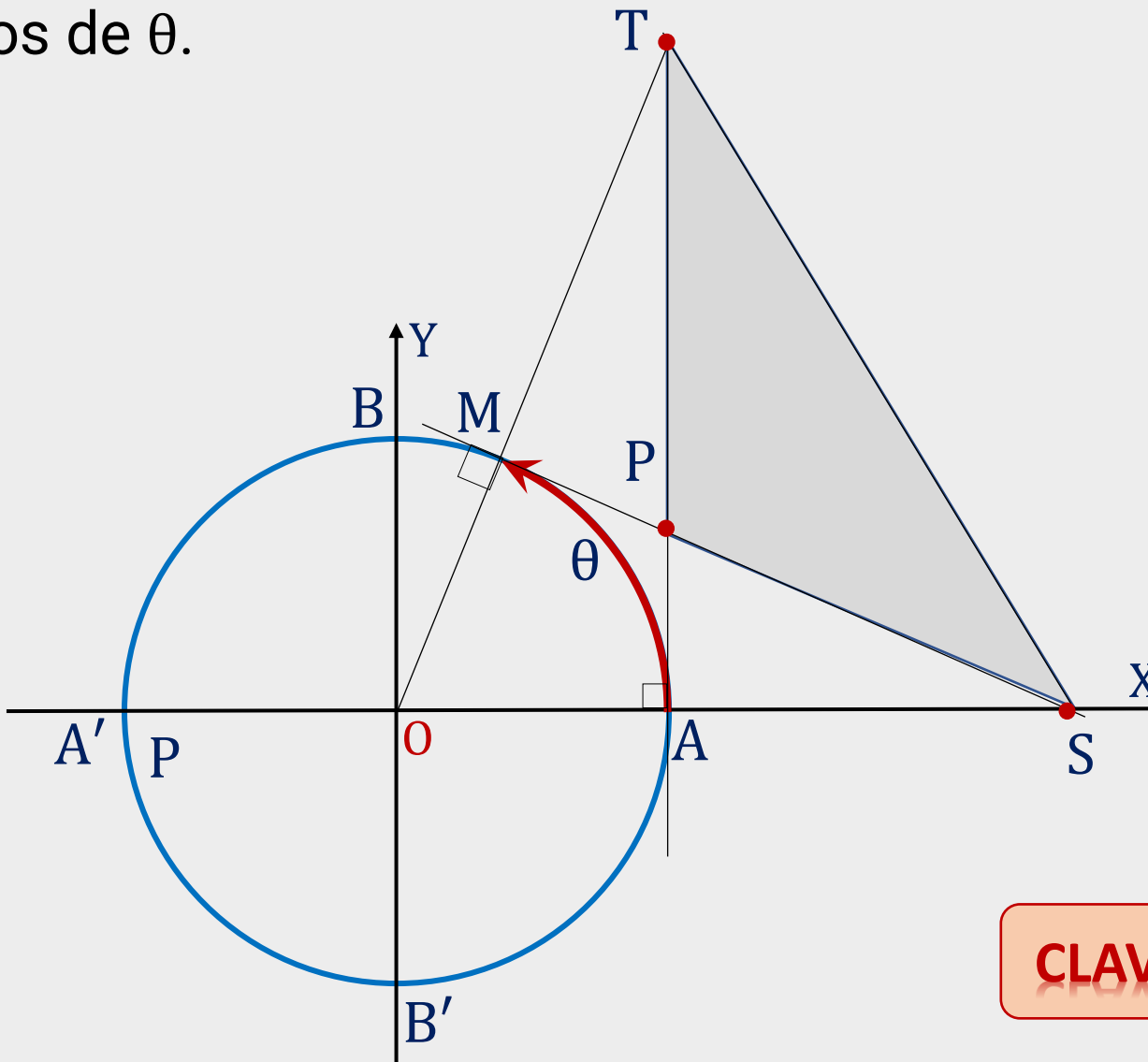
E) -2 o 0

CLAVE: E

PROBLEMA 22

En la circunferencia trigonométrica mostrada, calcule el área de la región sombreada en términos de θ .

- A) $0,5 \operatorname{exsec}(\theta) \csc(\theta)$
- B) $\operatorname{exsec}(\theta) \csc(\theta)$
- C) $0,5 \operatorname{exsec}^2(\theta) \csc(\theta)$
- D) $\operatorname{exsec}^2(\theta) \csc(\theta)$
- E) $\frac{\operatorname{exsec}^2(\theta)}{2 \operatorname{cov}(\theta)}$



CLAVE: C